Measure AlgebraにおけるTaylorの問題について (Function Algebraとその応用)

泉池, 敬司

数理解析研究所講究録
232巻 1975年 31-43

Measure algebra における Taylor の問題について

東教大　理　泉池敬司

§1. 序.　Taylor は measure algebra の maximal ideal space を表現するのに structure semigroup なるものを考えた。そして彼の一連の仕事により topology に関係している所の measure algebra の性質はかなり明確に取りえられる様になった。つまり structure semigroup の maximal group にのっている measure が G 上の L.C.A. group topology と1対1に対応しているのであるが，それに関係して1つの問題がでてくる。その Taylor の問題を肯定的に解くのがこの目的である。

§2. 記号及び定義.　ここでは次の記号を用いる。

G : non-discrete locally compact abelian group.

$\hat{G}$: G の dual group

E ⊂ $\hat{G}$ に対して

$E^{\perp}$: E の G での annihilator，つまり $E^{\perp}=\{\gamma\in G : (\gamma,x)=1 \text{ on } E\}$

すると $E^{\perp}$ は G の closed subgroup である。

$M(G)$： G 上の bounded regular Borel measure 全体よりなる Banach algebra，積は convolution，norm は total variation norm.

$L^1(G)$： G 上の group algebra.

$\mathrm{Rad}\, L^1(G)$： $L^1(G)$ の radical，つまり $L^1(G)$ を含む $M(G)$ の maximal ideal の共通部分。

$H \subset G$ compact subgroup に対して

m_H： H 上の normalized Haar measure, $\|m_H\|=1$, $m_H \in M(G)$.

G_H： H を open compact subgroup にする topology の備わった group G。 $\{U_\alpha\}$ を G における 0 の open base とするとき $\{U_\alpha \cap H\}$ を 0 の open base とする G 上の L.C.A. group topology。

(注) $M(G_H) \subset M(G)$.

$\mu, \nu \in M(G)$ に対して，

$\mu \ll \nu$： μ は ν に絶対連続.

$\mu \perp \nu$： μ と ν は互いに singular.

$\mu^* \in M(G)$： $\mu^*(E) = \overline{\mu(-E)}$ for Borel subset E of G.

$\hat{\mu}$： μ の Fourier-Stieltjes 変換 $\hat{\mu}(\gamma) = \int_G (-x, \gamma)\, d\mu(x)$, $\gamma \in \hat{G}$.

$\tilde{\mu}$： μ の Gelfand 変換

$N \subset M(G)$ closed ideal (subalgebra) に対して

N が L-ideal (L-subalgebra)

$\Longleftrightarrow$ $\lambda \in N$, $\forall \lambda \ll \nu$ for some $\nu \in N$.

$E \subset G$ が independent

$\Longleftrightarrow$ $\forall x_1, x_2, \cdots, x_k \in E$ に対して, もし $n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_k x_k = 0$

ならば $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 0$.

§ 3. Structure semigroup と Taylor の問題

Taylor は [3] で次の定理を示した。

定理 1. (Taylor [3]). $M(G)$ に対し次をみたす compact topological semigroup S と homomorphism $\theta : M(G) \to M(S)$ が存在する。

(1) θ: order-preserving isometric into isomorphism

$(\mu \ll \nu$ in $M(G) \Rightarrow \theta\mu \ll \theta\nu$ in $M(S))$

(2) $\theta(M(G))$ は $M(S)$ で weak* dense L-subalgebra.

(3) $M(G)$ の maximal ideal space は S 上の continuous semicharacter ($f(xy) = f(x)f(y)$, $x, y \in S$) の集合 $\hat{S}$ と 1 対 1 の対応があって, その対応は

$$M(G) \ni \forall \mu \longrightarrow \tilde{\mu}(f) = \int_S f \, d\theta\mu .$$

この定理によって $M(G)$ の構造を考えるのには $M(S)$ の subalgebra として取らえれば良いわけであるが, いまだに

$M(G)$とSの関係ははっきりわかっているとはいえない。わかっている所というと次の定理がある。

定理2（Taylor[4]）　Sの maximal group K_pに対して，もし，$M(K_p)=\{\mu\in M(G):\theta\mu$ はK_pに台をもつ$\}\neq\{0\}$ ならばGのもとの topology より強いG上の L.C.A. group topology τ が存在して　$M(K_p)=\mathrm{Rad}\,L^1(G_\tau)$である。又逆も成立する。

そこで$K\equiv\bigcup_{p\in P}K_p$（すべての maximal group の union）とする。すると$K=\{x\in S;\ |f(x)|=0$ or $1,\ \forall f\in\hat{S}\}$となっている。

定義．$M(K)\equiv\{\mu\in M(G);\ \theta\mu$ はKに concentrate している$\}$

$M_1(G)\equiv\{\mu\in M(K);\ |\theta\mu|(K_p)=0\ \ \forall p\in P\}$

$\mathcal{L}(G)\equiv\sum_\tau \mathrm{Rad}\,L^1(G_\tau)$.

すると定理2より$\mathcal{L}(G)\subset M(K)$，$M_1(G)\subset M(K)$
$\mathcal{L}(G)\perp M_1(G)$を得る。そこで次がTaylorの問題である。

Taylorの問題1（[4]）．

$M_1(G)\neq\{0\}$ なる L.C.A. group Gは存在するのか？

もう1つ別の所から$M(K)$に関係する所でわかっていることがある。$\mathfrak{M}\equiv\{\mu\in M(G):\ \hat{\mu^*}(f)=\overline{\hat{\mu}(f)},\ \forall f\in\hat{S}\}$
symmetric measure 全体とする。

定理 3（Taylor [3]）　$\mathcal{L}(G) \subset \mathfrak{M} \subset M(K)$.

Taylorの問題 2（[3]）　$\mathfrak{M} = M(K)$?

以下ここではある種の L.C.A. group G に対して次の性質をもつ $\mu \in M(G)$ の存在を示す。1) $\mu \neq 0$ 2) $\mu \in M_1(G)$ 3) $\mu \in \mathfrak{M}$
これは Taylor の問題 1 に対する肯定的な解答であるが，Taylor の問題 2 はまだわからない。

◎後で使う記号と性質

$f \in \hat{S}$, $f \geq 0$ に対して

$S_0(f) \equiv \{x \in \hat{S} : f(x) = 0\}$, $\hat{S}_1(f) \equiv \{x \in \hat{S} : f(x) = 1\}$

$M(\hat{S}_j(f)) \equiv \{\mu \in M(G) : \theta\mu$ は $\hat{S}_j(f)$ に台をもつ$\}$ $(j = 0, 1)$

Proposition 1（[3]）　$M(\hat{S}_0(f))$ は L-ideal，$M(\hat{S}_1(f))$ は L-subalgebra である。

Proposition 2（[3]）　$f \in \hat{S}$, $f \geq 0$ に対して
$M(\hat{S}_1(g_f)) = M(\hat{S}_1(f))$ なる $g_f \in \hat{S}$, $g_f^2 = g_f$ が存在する。

Proposition 3（[3]）　$f \in \hat{S}$, $f \geq 0$ に対して
$M(\hat{S}_0(h_f)) = M(\hat{S}_0(f))$ なる $h_f \in \hat{S}$, $h_f^2 = h_f$ が存在する。

§4. 定理とその証明.

Rを実数とする。すると$\hat{R}=R$である。$\bar{R}$をRのBohr compactificationとする。つまり$\bar{R}=\widehat{R_d}$.

定理。 次をみたす non-zero $\mu\in M(\bar{R})$が存在する。

(1) $\mu\geq 0$ (2) $\mu\in M_1(\bar{R})$ (3) $\mu\in\mathfrak{M}$ (4) $\mu*\mu\in\mathcal{L}(\bar{R})$

(5) μの spectrum は countable set.

定理を満たす $\mu\in M(\bar{R})$ の作り方

$\Lambda_n\equiv\{(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n);\ \alpha_0=0,\ \alpha_i=0 \text{ or } 1\ (i=1,2,\cdots,n)\}$

$\Lambda\equiv\bigcup_{n=0}^{\infty}\Lambda_n$ とおく。

$\alpha\in\Lambda$ に対して $|\alpha|\equiv n$ if $\alpha\in\Lambda_n$.

$\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_m)\in\Lambda$ に対して

$\alpha\wedge\beta\equiv(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$ if $\alpha_0=\beta_0,\ \alpha_1=\beta_1,\cdots,\ \alpha_k=\beta_k,\ \alpha_{k+1}\neq\beta_{k+1}$.

補題1. 次をみたすRの subset の family $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$が存在する。

(1) $E_\alpha\subsetneqq E_{\alpha,0}$, $E_\alpha\subsetneqq E_{\alpha,1}$ for $\alpha\in\Lambda$

(2) $E_\alpha\cap E_\beta=E_{\alpha\wedge\beta}$ for $\alpha,\beta\in\Lambda$

(3) $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}E_\alpha$ は independent set.

（証） Rは infinite independent set を含むから。

E_αより生成される subgroup を H_α で表わし，その $\bar{R}$ での annihilator を G_α で表わす。すると $E_\alpha^\perp = H_\alpha^\perp = G_\alpha$.

補題2. $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ は $\bar{R}$ の compact subgroup の family で次をみたす。

(1) $G_\alpha \supsetneqq G_{\alpha,0}$, $G_\alpha \supsetneqq G_{\alpha,1}$ for $\alpha\in\Lambda$.

(2) $G_\alpha / G_{\alpha,0}$, $G_\alpha / G_{\alpha,1}$ は infinite compact group

(3) $G_\alpha + G_\beta = G_{\alpha\wedge\beta}$ for $\alpha, \beta \in \Lambda$

ここで $\mu_n \equiv \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{\alpha\in\Lambda_n} m_{G_\alpha}$ （$n=0,1,2,\cdots$）とおく。すると $\mu_n \in M(\bar{R})$, $\mu_n \geq 0$, $\|\mu_n\| = 1$ をみたす。

補題3. $\{\mu_n\}$ の Fourier-Stieltjes 変換は次の性質をもつ。

(1) $\hat{\mu}_n(\gamma) = 1$ for $\gamma \in H_0$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$)

(2) $\gamma \in H_{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_k} \setminus H_{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{k-1}}$ に対して

$$\hat{\mu}_n(\gamma) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{for } n \geq k$$
$$= 0 \quad \text{for } n < k$$

(3) もし $\gamma \in R \setminus H_\alpha$ ($^\forall\alpha\in\Lambda$) ならば

$$\hat{\mu}_n(\gamma) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

(証) $\gamma\in R$ に対して，「$\gamma\neq 1$ on G_α ならば $\widehat{m_{G_\alpha}}(\gamma)=0$」より明らか.

補題3より $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ は唯一の weak $*$ cluster point $\mu\in M(\overline{R})$ をもつ。そして次の性質をもつ。

補題4. (1) $\mu\in M(\overline{R})$, $\mu\geq 0$, $\|\mu\|=1$.

(2) $\hat{\mu}(\gamma)=1$ for $\gamma\in H_0$

(3) $\hat{\mu}(\gamma)=\left(\frac{1}{2}\right)^k$ for $\gamma\in H_{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_k}\setminus H_{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{k-1}}$.

(4) $\hat{\mu}(\gamma)=0$ for $\gamma\in R\setminus H_\alpha$ ($\forall\alpha\in\Lambda$)

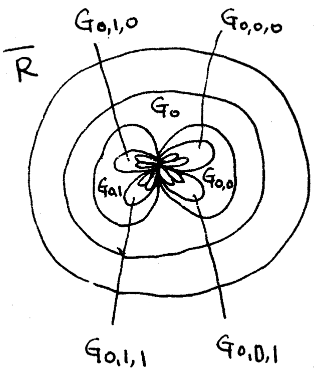
我々の目標はこの μ が定理の条件をみたすことを示すことである。そのために μ のもつ性質をもう少し調べる。

$\alpha\in\Lambda$, $n\geq|\alpha|$ に対して

$\Lambda_n^\alpha\equiv\{\beta\in\Lambda_n:\ \beta\wedge\alpha=\alpha\}$　$\Lambda^\alpha\equiv\bigcup_{n\geq|\alpha|}\Lambda_n^\alpha$ とおく。

そして $\mu_n^\alpha\equiv\sum_{\beta\in\Lambda_n^\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)^n m_{G_\beta}$ for $n\geq|\alpha|$ とおく。

すると $\mu_n^\alpha\geq 0$, $\|\mu_n^\alpha\|=\left(\frac{1}{2}\right)^{|\alpha|}$, $\mu_n=\sum_{\alpha\in\Lambda_n}\mu_n^\alpha$ である。



(これは μ_n を support G_α ($\alpha\in\Lambda_n$) によって分解したものである。)

μ_n の時と同じく，$\{\mu_n^\alpha\}_{n=|\alpha|}^{\infty}$ は唯一の weak $*$ cluster point $\mu^\alpha\in M(\overline{R})$ をもち，次の性質をもつ。

補題 5. (1) $\|\mu^\alpha\| = (\frac{1}{2})^{|\alpha|}$ (2) $\mu = \sum_{\alpha\in\Lambda_n} \mu^\alpha$ ($n\geq 0$)

(3) $\widehat{\mu^\alpha}(\gamma) = (\frac{1}{2})^{|\alpha|}$ for $\gamma \in H_\alpha$

(4) $\gamma \in H_{\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_k} \setminus H_{\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_{k-1}}$ ($k \geq |\alpha|$) に対して

$$\widehat{\mu^\alpha}(\gamma) = (\tfrac{1}{2})^k \quad \text{if} \quad (\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_k) \in \Lambda^\alpha \quad (\beta\wedge\alpha = \alpha)$$
$$= 0 \quad \text{if} \quad (\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_k) \notin \Lambda^\alpha \quad (\beta\wedge\alpha \neq \alpha)$$

(5) $\widehat{\mu^\alpha}(\gamma) = 0$ for $\gamma \in R \setminus H_\alpha$ ($\forall\alpha\in\Lambda$)

補題 6. (1) $\mu^\alpha \in M(\bar{R}_{G_\alpha})$, $\mu^\beta \perp M(\bar{R}_{G_\alpha})$ for $\beta\neq\alpha$, $|\beta| = |\alpha|$.

(2) $\mu^\alpha * \mu^\beta = (\frac{1}{2})^{|\alpha|+|\beta|} m_{G_{\alpha\wedge\beta}}$.

(証明)

(2) 補題 5 より次を得る。

$$\widehat{\mu^\alpha * \mu^\beta}(\gamma) = \widehat{\mu^\alpha}(\gamma)\widehat{\mu^\beta}(\gamma) = (\tfrac{1}{2})^{|\alpha|}(\tfrac{1}{2})^{|\beta|} \quad \text{if } \gamma \in H_{\alpha\wedge\beta}$$
$$= 0 \quad \text{if } \gamma \notin H_{\alpha\wedge\beta}.$$

これは $\mu^\alpha * \mu^\beta = (\frac{1}{2})^{|\alpha|+|\beta|} m_{G_{\alpha\wedge\beta}}$ であることを示す。

(1) $\phi : \bar{R} \longrightarrow \bar{R}/G_\alpha$ canonical homomorphism とする。

$\lambda \in M(\bar{R})$ に対して

$\dot{\lambda}(E) \equiv \lambda(\phi^{-1}(E))$ for every Borel subset E of $\bar{R}/G_\alpha$ とする。

すると $M(\bar{R}) \ni \lambda \longrightarrow \dot{\lambda} \in M(\bar{R}/G_\alpha)$ は homomorphism であり $\hat{\lambda}(\gamma\circ\phi) = \hat{\dot{\lambda}}(\gamma)$ for $\gamma \in \widehat{\bar{R}/G_\alpha} = H_\alpha$ である。

よって補題4より $\dot{\mu} = \frac{1}{2} m_{D_{\alpha_0}} + (\frac{1}{2})^2 m_{D_{\alpha_0,\alpha_1}} + \cdots + (\frac{1}{2})^{|\alpha|} m_{D_{\alpha_0,\cdots,\alpha_{|\alpha|-1}}} + (\frac{1}{2})^{|\alpha|} \delta_0$

を得る。ここで $D_{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_j}$ は $H_{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_j} \subset H_\alpha$ の $\bar{R}/G_\alpha$ で

の annihilator である。δ_0 は $0 \in \overline{R}/G_\alpha$ の point mass である。次に $H_\alpha / H_{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_j}$ が infinite group であることに注意すれば $m_{D_{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_j}}$ は $\overline{R}/G_\alpha$ で continuous measure である。又 μ_n^α ($n \geq |\alpha|$) が G_α に concentrate していることに注意すれば、$\dot{\mu}^\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{|\alpha|} \delta_0$ である。以上により

$\sum_{\beta \neq \alpha, \beta \in \Lambda_{|\alpha|}} \dot{\mu}^\beta$ は continuous measure on $\overline{R}/G_\alpha$ であり

$\mu^\alpha \in M(\overline{R}_{G_\alpha})$, $\mu^\beta \perp M(\overline{R}_{G_\alpha})$ for $\beta \neq \alpha$, $|\beta| = |\alpha|$ を得る。

(注意) $\mu^\alpha \perp \mu^\beta$ if $\alpha \neq \beta$, $|\alpha| = |\beta|$.

命題1. $\theta\mu(K_p) = 0$ for every maximal group K_p of S.

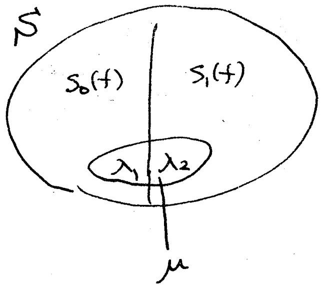
(証) 補題5の(1), 補題6の(1)より得られる。

補題7. $f \in \hat{S}$, $f^2 = f$, $\hat{\mu}(f) \neq 0$ とする。すると次をみたす $\alpha \in \Lambda$ が存在する。

(1) $\mu^\alpha \in M(S_1(f))$

(2) $\mu^\beta \in M(S_0(f))$ for $\beta \neq \alpha$, $|\beta| = |\alpha|$.

(証明)



$\hat{\mu}(f) \neq 0$ であるから $\mu = \lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_1 \in M(S_0(f))$, $\lambda_2 \in M(S_1(f))$ と分解できる。そこですべての $n \geq 1$ に対して

$\mu_n \in M(S_0(f))$ と仮定する。すると $(\frac{1}{2})^{n_0} < \|\lambda_2\|$ なる自然数 n_0 に対して $x, \nu \in \Lambda_{n_0}$, $\mu^x \not< \lambda_2$, $\mu^\nu \not< \lambda_2$ なるものが存在する。補題 6 の(2)より, $\mu^x * \mu^\nu = (\frac{1}{2})^{2n_0} m_{G_{x \wedge \nu}}$ と $\mu^x * \mu^\nu \in M(S_0(f))$ を得る。しかし $M(S_1(f))$ は L-subalgebra であることより $\mu^x * \mu^\nu \notin M(S_0(f))$ を得て矛盾を生ずる。よって $\mu_n \notin M(S_0(f))$ なる自然 n がある。 そこで $\mu_n \notin M(S_0(f))$ なる一番小さな自然数を n_1 とする。すると補題 2 の(3)より $\alpha \in \Lambda_{n_1}$ が存在して $m_{G_\alpha} \in M(S_1(f))$, $m_{G_\beta} \in M(S_0(f))$ for $\beta \in \Lambda_{n_1}$ $(\beta \neq \alpha)$ が成立する。所で $M(\bar{R}_{G_\alpha}) \subset M(S_1(f))$ であるから, 補題 6 の(1)より $\mu^\alpha \in M(S_1(f))$ を得る((1)の証明終り)。 そこで $\mu^\beta \notin M(S_0(f))$ for some $\beta \in \Lambda_{n_1}$ $(\beta \neq \alpha)$ とする。すると $\mu^\beta * \mu^\alpha \notin M(S_0(f))$ である。しかし補題 6 の(2)より $\mu^\beta * \mu^\alpha = (\frac{1}{2})^{|\beta|+|\alpha|} m_{G_{\alpha \wedge \beta}}$ を得る。しかしこれは $\mu^\alpha * \mu^\beta \in M(S_0(f))$ を示す。よって矛盾である。

命題 2. $\theta\mu$ は K に concentrate している。

(証明)

$f \in \hat{S}$, $f \geq 0$, $f^2 = f$, $\tilde{\mu}(f) \neq 0$ とする。Proposition 3 より $h_f \in \hat{S}$ $(h_f^2 = h_f)$ が存在して $\tilde{\mu}(h_f) \neq 0$ である。すると補題 7 をみたす $\alpha \in \Lambda$ が存在して $\mu^\alpha \in M(S_1(h_f))$, $\mu^\beta \in M(S_0(h_f))$ for $\beta \neq \alpha$, $|\beta| = |\alpha|$ である。所で

$M(\bar{R}_{G_\alpha}) \subset M(S_1(h_f))$, $m_{G_\alpha} \in M(S_1(g_f))$ であるから、
$M(\bar{R}_{G_\alpha}) \subset M(S_1(g_f))$, $\mu^\alpha \in M(S_1(g_f))$ を得る。このことは
μ が K に concentrate していることを示している。

以上により我々の定理が成立する。一般には次を得る。

定理′. G を compact abelian group とする。もし $\hat{G}$ が infinite independent set を含むならば $M_1(G) \neq \{0\}$ である。

系. $M_1(G) \neq \{0\}$ なる compact metrizable abelian group G が存在する。

(証明)

補題1で E_α を countable set にとる。H を $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ から生成されるsubgroup とすると、H は countable subgroup of R である。$H^\perp$ を H の $\bar{R}$ での annihilator とすると $H = \widehat{\bar{R}/H^\perp}$ であるから $\bar{R}/H^\perp$ は compact metrizable abelian group である。あとは同じ様に $\bar{R}/H^\perp$ 上で話しを進めていけばよい。

$M_1(G) \neq \{0\}$ なる group G の存在はわかったのだが、一番簡単な group, R, と $\mathbb{T}$ (circle group) に関してはまだわかっていない。予想としては、$M_1(R) = \{0\}$, $M_1(\mathbb{T}) = \{0\}$ である。

最後に，清水氏（[6]）も同様の結果を得ています。idea はだいたい同じです。

参考　文献

1. K. Izuchi : On a problem of J. L. Taylor, to appear.
2. W. Rudin : Fourier analysis on groups, Interscience, New York, 1962.
3. J. L. Taylor : The structure of convolution measure algebras, Trans. A.M.S. 119 (1965), 150-166.
4. ——— : L-subalgebras of M(G), Trans. A.M.S. 135 (1969), 105-113.
5. ——— ; Measure Algebras, Regional conf. ser. Math. (Amer. Math. Soc.) No. 16 (1973).
6. T. Shimizu ; Independent sets and measure algebras, to appear.